

PEMODELAN MATEMATIKA INFILTRASI AIR PADA SALURAN IRIGASI ALUR

Muhammad Manaqib

Matematika UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id

Abstrak

Air merupakan salah satu kebutuhan utama dalam kegiatan pertanian, karena tanpa air yang cukup tanaman pertanian tidak akan berproduksi optimal. Cara untuk mencukupi air pada tanaman pertanian adalah dengan irigasi. Salah satu metode irigasi yang banyak digunakan pada pertanian di dunia adalah metode irigasi alur (furrow). Air masuk/infiltrasi ke dalam tanah dari dasar alur dan dinding alur menuju daerah perakaran tanaman. Kekompleksan proses infiltrasi air dalam tanah membuat analisis infiltrasi dengan percobaan laboratorium sulit dilakukan dan memerlukan biaya yang besar. Alternatif yang dapat digunakan adalah dengan pemodelan matematika. Makalah ini membahas tentang pemodelan matematika infiltrasi air pada saluran irigasi alur berbentuk trapesium. Model matematika ini berberbentuk Masalah Syarat Batas (MSB) dengan domain sebuah penampang melintang saluran irigasi alur yang tertutup dan terbatas. Persamaan pengaturannya diperoleh dari Persamaan Richard, yang selanjutnya ditransformasikan menggunakan transformasi Kirchoff dan variabel tak berdimensi menjadi Persamaan Helmholtz termodifikasi. Sedangkan syarat batasnya berbentuk syarat batas campuran Neuman dan Robin.

Kata kunci : irigasi alur, infiltrasi, Persamaan Helmholtz termodifikasi.

Abstract

Water is one of the main necessity of agricultural activities, because without enough water agricultural crops will not be produced optimally. The way to insufficient water in agricultural crops is irrigation. One of the irrigation methods which is used on agriculture in the world is furrow irrigation method. Water gets into the soil from the bottom of the furrow and furrow's wall towards the root zone of the plants. The complexity of the water infiltration process in the ground makes infiltration analysis by laboratory experiment difficult to do and needs substantial cost. The alternative way which can do is with mathematical modeling. This paper discusses about mathematical modeling of water infiltration in furrow irrigation channel trapezoidal in shape. This mathematical modeling is shaped boundary condition problem with a cross section of a closed and limited line of irrigation. Governing equation obtained from Richard equation which then transformed using Kirchoff transformation and non dimensional variable into the modified Helmholtz equation. While, the boundary condition is shaped mixture Neuman and Robin boundary condition.

Keywords: furrow irrigation, infiltration, modified Helmholtz equation.

1. Pendahuluan

Air adalah kebutuhan kebutuhan pokok manusia. Sekitar 70% dari permukaan bumi adalah air, tetapi bukan berarti persediaan air untuk kebutuhan manusia berlimpah, karena 97,5% air tersebut adalah air laut yang tidak bisa langsung digunakan, perlu diolah dengan

teknologi tinggi untuk dapat digunakan. Sisanya 2,5% berupa air tawar yang 99,7%-nya terdapat di dalam perut bumi dan hanya 0,3%-nya yang berada di permukaan [1]. Hal tersebut mengindikasikan bahwa air yang dapat digunakan oleh manusia untuk kebutuhan domestik seperti minum, mandi, mencuci, serta kebutuhan untuk pertanian dan industri sangat

terbatas. Oleh karena itu, dalam menggunakan air harus bijak dan hemat.

Terdapat tiga sektor utama pengguna air dunia, yaitu sektor pertanian sebesar 71%, sektor domestik 18%, dan sektor industri 8% [6]. Sektor pertanian memiliki porsi terbesar dalam penggunaan air. Hal tersebut dikarenakan jumlah penduduk dunia yang terus bertambah, akibatnya kebutuhan bahan makanan juga semakin meningkat. Besarnya kebutuhan air untuk pertanian juga mengindikasikan bahwa efisiensi penggunaan air pada sektor ini cukup rendah [6]. Diperlukan peningkatan efisiensi penggunaan air pada sektor pertanian agar ketersediaan air dunia dapat dijaga.

Salah satu kebutuhan utama dalam kegiatan pertanian adalah air, karena tanpa air yang cukup tanaman pertanian tidak akan berproduksi optimal, bahkan mati kekurangan air. Salah satu cara mencukupi air pada tanaman pertanian adalah dengan irigasi. Menurut [11] irigasi adalah usaha penyediaan, pengaturan, dan pembuangan air irigasi untuk menunjang pertanian yang jenisnya meliputi irigasi permukaan, irigasi rawa, irigasi air bawah tanah, irigasi pompa, dan irigasi tambak.

Salah satu jenis irigasi permukaan yang cukup efisien dalam penggunaan air adalah metode irigasi alur (furrow). Air masuk/infiltrasi ke dalam tanah dari dasar alur dan dinding alur menuju daerah perakaran tanaman. Salah satu hal yang penting pada sistem irigasi alur adalah distribusi air dalam tanah. Permasalahan yang muncul adalah air yang tidak sampai pada daerah perakaran tanaman maupun kandungan air pada daerah perakaran yang kurang ataupun berlebih. Jika tanaman kekurangan air maka akan mati, sedangkan jika berlebih akan terjadi pemborosan penggunaan air ataupun mati untuk jenis tanaman yang tidak tahan air berlebih.

Diketahui bahwa tanah yang terletak dekat dengan alur lebih banyak mengandung air daripada tanah yang jauh dari alur. Selain itu proses infiltrasi air dalam tanah juga melibatkan perubahan keadaan dan kandungan air dalam tanah. Hal ini mengindikasikan bahwa proses infiltrasi bukan masalah yang sederhana akan tetapi cukup kompleks. Kekompleksan proses infiltrasi air dalam tanah membuat analisis infiltrasi dengan percobaan laboratorium sangatlah sulit. Selain itu, penelitian dengan percobaan laboratorium cukup mahal karena peralatan yang mahal dan memerlukan banyak waktu karena data yang harus diperoleh secara

reguler. Alternatif yang dapat digunakan adalah dengan pemodelan matematika, yang selanjutnya dapat dianalisis proses infiltrasinya [13].

2. Kajian Teori

2.1 Hukum Darcy

Hukum perembesan air di dalam tanah atau infiltrasi air dalam tanah pertamakali di dipelajari oleh Henry Darcy seorang ilmuwan dari Perancis pada tahun 1856 [8]. Hukum Darcy menyatakan bahwa *flux* air q (berdimensi L/T) adalah sebanding dengan *hydraulic head gradient*, ∇H . Secara matematis Hukum Darcy dinyatakan dalam persamaan berikut

$$q = -K\nabla H \quad (1)$$

dengan K adalah *hydraulic conductivity*. Tanda negatif pada (1) mengindikasikan bahwa aliran air yang melewati tanah kecepatannya akan berkurang.

2.2 Persamaan Richard

Hukum Darcy memberikan model matematika infiltrasi air dalam media berporous yang jenuh air. Selanjutnya dari Hukum Darcy tersebut L.A. Richard mengembangkannya menjadi model matematika infiltrasi air dalam media berporous yang tidak jenuh air atau bergantung pada waktu. Richard mengembangkan Hukum Darcy dengan mengubah *hydraulic conductivity* menjadi fungsi dari *suction potential* dan fungsi dari kadar air [8], sehingga diperoleh

$$q = -K(\psi)\nabla H, \quad (2)$$

$$q = -K(\theta)\nabla H. \quad (3)$$

Suction potential (ψ) adalah potensial dari gaya yang timbul dari interaksi antara tanah dan air. Sedangkan *moisture content* (θ) adalah perbandingan antara berat air dengan berat butir tanah.

Diperhatikan bahwa yang akan diamati adalah infiltrasi air dalam tanah sehingga ruang di atas permukaan tanah tidak diperhatikan. Oleh karena itu digunakan sistem koordinat $OXYZ$ dan dipandang sumbu- Z berarah kebawah bernilai positif. Didefinisikan *hydraulic head* sebagai energi per unit berat. Berdasarkan sistem koordinat yang digunakan didefinisikan *hydraulic head*

$$H = \psi - Z \quad (4)$$

Substitusi (4) ke (3) diperoleh diperoleh,

$$q = -K(\theta) \left[\frac{\partial(\psi-Z)}{\partial X} \mathbf{i} + \frac{\partial(\psi-Z)}{\partial Z} \mathbf{j} \right] \quad (5)$$

$$= -K(\theta) \left[\frac{\partial\psi}{\partial X} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial Z} - 1 \right) \mathbf{j} \right]$$

Misalkan U dan V berturut-turut adalah komponen *flux* horisontal dan komponen *flux* vertikal, maka

$$U = -K(\theta) \frac{\partial\psi}{\partial X}, \quad V = -K(\theta) \frac{\partial\psi}{\partial Z} + K(\theta) \quad (6)$$

Didefinisikan *flux* normal pada sebuah permukaan dengan vektor normal $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ yang berarah keluar adalah

$$F = U n_1 + V n_2 \quad (7)$$

$$= -K(\theta) \left[\frac{\partial\psi}{\partial X} n_1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial Z} - 1 \right) n_2 \right]$$

Hukum kekekalan massa pada aliran fluida menyatakan bahwa perubahan volume fluida terhadap waktu sama dengan perubahan aliran *flux* terhadap jarak [8]. Hukum Kekekalan massa jika diterapkan pada aliran air dalam tanah maka diperoleh, perubahan kandungan air dalam tanah terhadap waktu sama dengan perubahan *flux* terhadap jarak. Secara matematis dapat dituliskan

$$\frac{\partial\theta}{\partial T} = \nabla q \quad (8)$$

Diketahui bahwa *flux* yang masuk melewati tanah adalah lebih besar dari pada *flux* yang keluar melewati tanah, sehingga gradien dari *flux* bernilai negatif. Selanjutnya dari (2) dan (5), serta gradien *flux* yang negatif diperoleh,

$$\frac{\partial\theta}{\partial T} = -\nabla \left(-K(\theta) \left[\frac{\partial\psi}{\partial X} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial Z} - 1 \right) \mathbf{j} \right] \right) \quad (9)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X} \left(K(\theta) \frac{\partial\psi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(K(\theta) \frac{\partial\psi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial Z}$$

dengan $K(\theta)$ adalah *hydraulic conductivity* yang berdimensi L/T dan ψ adalah *suction potential* yang berdimensi L . Persamaan (9) inilah yang disebut sebagai Persamaan Richard yang memrepresentasikan perpindahan air berdimensi dua dalam tanah tidak jenuh.

3. Pembahasan

3.1 Persamaan Pengatur

Persamaan Richard berbentuk persamaan diferensial non linear yang penyelesaiannya sulit dicari, sehingga diperlukan transformasi untuk mengubah (9) ke bentuk persamaan yang lebih mudah diselesaikan. Persamaan Richard akan ditransformasikan menjadi Persamaan Helmholtz

yang berbentuk persamaan diferensial linear. Prosedur transformasinya pertama, digunakan transformasi yang diberikan oleh Kirchhoff, dilanjutkan transformasi menggunakan model eksponensial konduktifitas hidraulik yang diberikan oleh Garner, selanjutnya digunakan variabel tak berdimensi [4], dan terakhir digunakan transformasi yang diberikan oleh Batu.

1. Transformasi Kirchhoff menggunakan rumus

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\psi} K(s) ds \quad (10)$$

dengan Θ adalah (*Matrix Flux Potential*) (MFP). Digunakan (13) maka diperoleh

$$\frac{\partial\Theta}{\partial X} = K \frac{\partial\psi}{\partial X} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial\Theta}{\partial Z} = K \frac{\partial\psi}{\partial Z} \quad (11)$$

2. Model eksponensial dari konduktifitas hidraulik didefinisikan oleh [7],

$$K = K_0 e^{\alpha\psi}, \quad \alpha > 0 \quad (12)$$

dengan α adalah sebuah parameter dan K_0 adalah konduktifitas hidraulik pada tanah jenuh. Diperhatikan bahwa dari (10) dan (12) dapat diperoleh

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\psi} K_0 e^{\alpha s} ds \Leftrightarrow K = \alpha\Theta \quad (13)$$

Turunkan (13) terhadap Z , maka diperoleh

$$\frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{\partial\alpha\Theta}{\partial\Theta} \frac{\partial\Theta}{\partial Z} = \alpha \frac{\partial\Theta}{\partial Z} \quad (14)$$

Substitusikan (11) dan (14) ke Persamaan Richard (9) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z} \right) - \alpha \frac{\partial\Theta}{\partial Z} \\ &= \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} - \alpha \frac{\partial\Theta}{\partial Z} \end{aligned} \quad (15)$$

Penelitian ini akan membahas infiltrasi air pada saluran irigasi jenuh, artinya untuk perubahan waktu yang terjadi, kondisi infiltrasi air tersebut tetap atau tidak bergantung waktu.

Akibatnya, $\frac{\partial\theta}{\partial T}$ pada (15) dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} = \alpha \frac{\partial\Theta}{\partial Z} \Leftrightarrow \nabla^2 = \alpha \frac{\partial\Theta}{\partial Z} \quad (16)$$

Selanjutnya, untuk transformasi komponen vertikal dan horisontal *flux* (6), serta *flux* normal (7) adalah sebagai berikut,

$$U = -\frac{\partial \Theta}{\partial X}, V = \alpha \Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \quad (17)$$

$$F = -\frac{\partial \Theta}{\partial X} n_1 + \left(\alpha \Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \right) n_2. \quad (18)$$

3. Transformasi ke bentuk persamaan yang bervariasi tidak berdimensi, yaitu menggunakan variabel tak berdimensi berikut [4]:

$$x = \frac{\alpha}{2} X, z = \frac{\alpha}{2} Z, \Phi = \frac{\pi \Theta}{v_0 L}, \quad (19)$$

$$u = \frac{2\pi}{v_0 \alpha L} U, v = \frac{2\pi}{v_0 \alpha L} V, f = \frac{2\pi}{v_0 \alpha L} F.$$

dengan v_0 adalah *flux* awal dan L adalah setengah panjang saluran irigasi. Menggunakan variabel-variabel tidak berdimensi (19), maka akan diperoleh

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{\partial \Theta}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{v_0 \alpha L}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = \frac{\partial \Theta}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{v_0 \alpha L}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (21)$$

Selanjutnya, dari Persamaan (20) dan Persamaan (21) dapat diperoleh,

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{v_0 \alpha L}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \frac{v_0 \alpha^2 L}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{v_0 \alpha L}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{v_0 \alpha^2 L}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (23)$$

Substitusikan (20)-(23) ke (16), (17), dan (18), diperoleh

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

komponen horisontal dan vertikal *flux* tidak berdimensi

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ dan } v = 2\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (25)$$

serta untuk *flux* normal tidak berdimensi,

$$f = u n_1 + v n_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} n_1 + \left(2\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) n_2. \quad (26)$$

4. Transformasi oleh Batu [4] dengan memisalkan

$$\Phi = \phi e^z. \quad (27)$$

Berdasarkan Persamaan (27) dapat diperoleh turunan pertama dan kedua Φ terhadap x dan y sebagai berikut,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e^z \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e^z \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = e^z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = e^z \left(\phi + 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

Substitusikan (28) ke Persamaan (24), diperoleh

$$e^z \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\phi + 2 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) - 2 \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (29)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \phi. \quad (30)$$

Persamaan (30) inilah yang disebut sebagai Persamaan Helmholtz termodifikasi, yang merepresentasikan infiltrasi air pada saluran irigasi jenuh. Selanjutnya *flux* normal tidak berdimensi (26) dengan transformasi (27) menjadi

$$f = -e^z \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi n_2 \right) \quad (31)$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (31) dapat diperoleh definisi turunan normal,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi n_2 - e^z f. \quad (32)$$

Akhirnya, diperoleh (30) berupa Persamaan Helmholtz Termodifikasi dengan variabel tak berdimensi ϕ . Persamaan (30) dapat diselesaikan dengan metode numerik, salah satunya dengan MEB atau DRBEM. Setelah diperoleh nilai ϕ , selanjutnya dapat ditransformasikan kembali ke bentuk awal yaitu

$$\psi = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha \phi e^z v_0 L}{\pi K_0} \right) \quad (33)$$

sehingga diperoleh ψ sebagai *suction potential* pada infiltrasi saluran irigasi. Penelitian ini menggunakan nilai *suction potential* dan *water content* (θ) untuk analisis infiltrasi air pada saluran irigasi. Berikut diberikan hubungan antara *suction potential* dan *water content* [14],

$$\theta = \left(\frac{1}{1 + (\alpha \psi)^n} \right)^m (\theta_s - \theta_r) + \theta_r \quad (34)$$

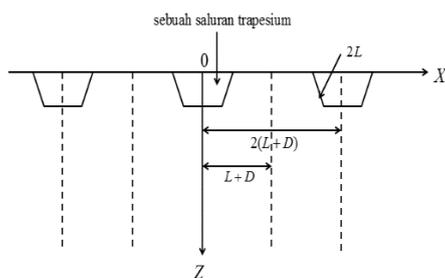
dengan ϕ_r dan ϕ_s berturut-turut adalah *residual water content* dan *saturated water content*. Nilai α, m dan n adalah parameter yang bergantung pada jenis tanah.

3.2 Syarat Batas

Bentuk saluran irigasi alur yang diteliti adalah trapesium, karena bentuk ini lazim digunakan oleh para petani. Asumsi-asumsi yang digunakan pada saluran adalah [13]

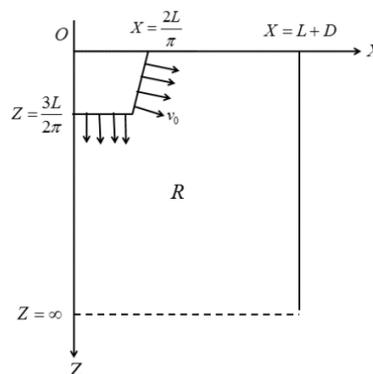
1. Lebar saluran irigasi memiliki lebar yang sama dan memiliki panjang yang cukup panjang, sehingga dalam model ini panjang saluran irigasi diabaikan.
2. Saluran irigasi berbentuk trapesium dengan panjang penampang permukaan saluran sebesar $2L$.
3. Jarak antar titik tengah dua buah saluran yang berdekatan adalah $2(L+D)$.
4. Saluran selalu penuh dengan air.
5. Pengaruh dari saluran irigasi lain diabaikan.
6. Laju infiltrasi air/besar *flux* masuk pada permukaan saluran irigasi adalah konstan, yakni sebesar v_0 .
7. Tidak ada aliran air yang masuk kecuali dari saluran.

Sesuai dengan asumsi-asumsi tersebut maka koordinat yang digunakan adalah $OXYZ$ dengan O adalah pusat saluran dan OZ menyatakan kedalaman yang bernilai positif. Berikut diberikan Gambar 1 sebagai ilustrasi penjelasan di atas.



Gambar 1. Bentuk Geometris Saluran Irigasi Trapesium

Berdasarkan sifat simetris pada model ini, seperti terlihat pada Gambar 1 maka cukup dianalisis pada sebuah daerah $0 \leq X \leq L+D$ dan $Z \geq 0$. Sehingga dapat didefinisikan domain pada model ini adalah sebuah daerah semi takterbatas $0 \leq X \leq L+D$ dan $Z \geq 0$, yang selanjutnya domain ini dimisalkan R [10]. Berikut diberikan domain R beserta *flux* yang ada pada domain tersebut.



Gambar 2. Domain Masalah Infiltrasi Saluran Irigasi Alur

Selanjutnya karena tidak ada aliran air yang masuk kecuali pada permukaan saluran maka $F=0$ pada $X=0$, $X=L+D$, dan $Z=0$. Diasumsikan bahwa pada kedalaman yang takberhingga laju dari MFP mendekati nol, sehingga diperoleh $\frac{\partial \Theta}{\partial X} \rightarrow 0$ dan $\frac{\partial \Theta}{\partial Z} \rightarrow 0$

untuk $Z \rightarrow \infty$. Berdasarkan uraian tersebut maka dapat dirumuskan syarat batas sebagai berikut.

$$F = -v_0, \text{ pada permukaan saluran,} \quad (35)$$

$$F = 0, \text{ untuk } \frac{2L}{\pi} \leq X \leq L+D \text{ dan } Z=0, \quad (36)$$

$$F = 0, \text{ untuk } X=L+D \text{ dan } Z \geq 0, \quad (37)$$

$$F = 0, \text{ untuk } X=0 \text{ dan } Z \geq \frac{3L}{2\pi}, \quad (38)$$

dan

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = 0, \text{ untuk } 0 \leq X \leq L+D, \text{ dan } Z = \infty. \quad (39)$$

Berdasarkan sistem koordinat yang digunakan, dapat didefinisikan vektor normal yang berarah keluar domain R pada batas domain sebagai berikut.

$$\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2), \text{ pada permukaan saluran,} \quad (40)$$

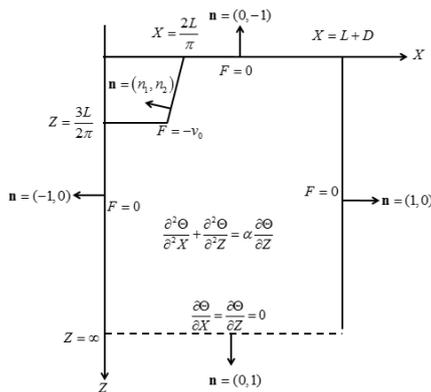
$$\mathbf{n} = (\mathbf{0}, -1), \text{ untuk } \frac{2L}{\pi} \leq X \leq L+D \text{ dan } Z=0, \quad (41)$$

$$\mathbf{n} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}), \text{ untuk } X=L+D \text{ dan } Z \geq 0, \quad (42)$$

$$\mathbf{n} = (-\mathbf{1}, \mathbf{0}), \text{ untuk } X=0 \text{ dan } Z \geq \frac{3L}{2\pi}, \quad (43)$$

$$\mathbf{n} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}), \text{ untuk } 0 \leq X \leq L+D \text{ dan } Z = \infty. \quad (44)$$

Jadi, diperoleh MSB (16) dengan syarat batasnya (35)-(39) sebagai model matematika infiltrasi air dalam saluran irigasi alur yang dinyatakan dalam MFP. Berikut diberikan Gambar 3, sebagai ilustrasi MSB tersebut beserta vektor normal pada batas domainnya.



Gambar 3. MSB Infiltrasi Irigasi Alur dalam MFP

Seperti pada pembahasan sebelumnya setelah model infiltrasi air dalam bentuk MFP diperoleh, selanjutnya ditransformasikan dalam variabel tak berdimensi (19). Oleh karena itu, syarat batas (35)-(39) juga akan ditransformasikan dalam variabel tak berdimensi, hasilnya adalah sebagai berikut.

$$f = -\frac{2\pi}{\alpha L} \text{ pada permukaan saluran,} \quad (45)$$

$$f = 0, \text{ untuk } \frac{\alpha L}{\pi} \leq x \leq \frac{\alpha}{2}(L+D), z=0 \quad (46)$$

$$f = 0, \text{ untuk } x = \frac{\alpha}{2}(L+D) \text{ dan } z \geq 0, \quad (47)$$

$$f = 0, \text{ untuk } x=0 \text{ dan } z \geq \frac{3\alpha L}{4\pi}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (49)$$

$$\text{untuk } 0 \leq x \leq \frac{\alpha}{2}(L+D) \text{ dan } z = \infty.$$

Persamaan (45)-(49) telah memberikan nilai dari

$$f \text{ atau } \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ pada batas domainnya. Dari}$$

nilai tersebut akan digunakan untuk membentuk syarat batas yang berbentuk syarat batas Neuman dan Robin dengan memanfaatkan (31), (32) dan vektor normal (40)-(44), diperoleh

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi n_2 + \frac{2\pi}{\alpha L} e^{-z}, \text{ pada permukaan,} \quad (50)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\phi, \text{ untuk } \frac{\alpha L}{\pi} \leq x \leq \frac{\alpha}{2}(L+D), z=0, \quad (51)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \text{ untuk } x = \frac{\alpha}{2}(L+D) \text{ dan } z \geq 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \text{ untuk } x=0 \text{ dan } z \geq \frac{3\alpha L}{4\pi}, \quad (53)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\phi, \text{ untuk } 0 \leq x \leq \frac{\alpha}{2}(L+D), z = \infty. \quad (54)$$

Domain dalam model ini adalah daerah semi tak berhingga R , sedangkan penyelesaian MSB

dengan domain semi tak terbatas sulit dilakukan. Sehingga perlu dilakukan pembatasan domain dengan mengambil $z = c$, untuk suatu c bilangan real positif pada syarat batas (54)[12]. Selanjutnya dapat didefinisikan ruas garis C_1, C_2, C_3, C_4 , dan C_5 ,

$$C_1 : \text{Permukaan dari saluran,} \quad (55)$$

$$C_2 : \frac{\alpha L}{\pi} \leq x \leq \frac{\alpha}{2}(L+D) \text{ dan } z=0, \quad (56)$$

$$C_3 : x = \frac{\alpha}{2}(L+D) \text{ dan } 0 \leq z \leq c, \quad (57)$$

$$C_4 : x=0 \text{ dan } \frac{3\alpha L}{4\pi} \leq z \leq c, \quad (58)$$

$$C_5 : 0 \leq x \leq \frac{\alpha}{2}(L+D) \text{ dan } z=c. \quad (59)$$

Misalkan $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$, maka diperoleh MSB model matematika infiltrasi air dalam saluran irigasi alur dalam variabel tak berdimensi dengan domain R yang tertutup dan terbatas oleh kurva C sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \phi(x, z)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi(x, z)}{\partial^2 z} = \phi(x, z), \quad (60)$$

dengan syarat batas,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi n_2 + \frac{2\pi}{\alpha L} e^{-z}, \text{ pada } C_1, \quad (61)$$

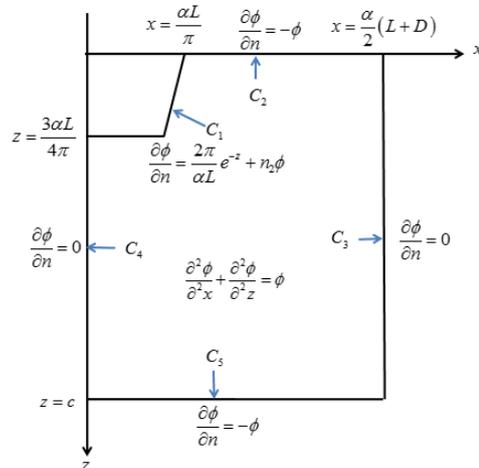
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\phi, \text{ pada } C_2, \quad (62)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \text{ pada } C_3, \quad (63)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \text{ pada } C_4, \quad (64)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\phi, \text{ pada } C_5. \quad (65)$$

Secara sistematis MSB tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. MSB dengan Domain R yang Tertutup dan Terbatas oleh Kurva C

4. Penutup

Model matematika infiltrasi air pada saluran irigasi alur berbentuk MSB dengan syarat batas campuran Neuman dan Robin. Sedangkan persamaan pengaturnya berbentuk persamaan Helmholtz termodifikasi.

Referensi

- [1] Ali, M.H., 2010, *Fundamentals of Irrigation and On Farm*, Springer, New York.
- [2] Amoozegar, et al., 1984, *Design Nomographs for Trickle Irrigation System*, *J of Irr. and Drainage Eng.*, 110, pp. 107-120.
- [3] Ang, Whye-Teong, 2007, *A Beginners Course in Boundary Element Methods*, Universal Publishers, Florida.
- [4] Batu, V, 1978, *Steady Ilfiltration from Single and Periodik Strip Source*, *Soil Sci.Soc. Am. J.*, 42, pp. 544-549.
- [5] Bos, M.G., ell., 2008, *Water Requirements for Irrigation and Environment*, Spinger, New York.
- [6] Burton, Martin, 2010, *Irrigation Management : Principles and Practices*, CABI, Wallingford.
- [7] Gardner, W.R., 1958, *Some Steady State Solutions of the Unsaturated Moisture Flow Equation with Application to Evaporation from a Water Table*, *Soil Science*, 85: 228-232.
- [8] Hillel, Daniel, 2004, *Introduction to Environmental Soil Physics*, Universal Elsevier Science, San Diego.
- [9] Katsikadelis, Jhon T., 2002, *Boundary Element : Theory and Applications*, Elsevier Science, Oxford.
- [10] Lobo, Maria, 2008, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods for the Solution of a Class of Ilfiltration Problems*, Faculty of Engineering, Coputer and Mathematical Sciences, University of Adelaide, Doctor Disertation.
- [11] Republik Indonesia, 2006, *Peraturan Pemerintah Tentang Irigasi*, Sekretariat Negara, Jakarta.
- [12] Solekhuudin, Imam dan Ang, K.C., 2012, *Suction Potential and Water Absorption from Periodic Chanel in Different Types of*

Homogeneous Soil, *Electronic Jurnal of Boundary Element*, 10, pp. 42-55.

- [13] Solekhuudin, Imam, 2013, *Dual Reciprocity Boundary Element Methods for Water Ilfiltration Problems in Irrigation*, National Institute of Education, Nangyang Technological University, Doctor Dissertation.
- [14] Warrick, A.W., 2002, *Soil Physics Companion*, CRC Press, Washington D.C.